Algèbre 8 - Produits scalaires et espaces préhilbertiens réels

Dans tout le chapitre, les espaces vectoriels considérés sont sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

1 Produits scalaires

Définition. *Soit E un $\mathbb{R}$-ev. On appelle* ***produit scalaire*** *(p.s.) sur E toute application $\Phi : E^2 \to \mathbb{R}$ qui est :*

- ***symétrique :*** $\forall x, y \in E,\ \Phi(x, y) = \Phi(y, x)$ *;*
- ***bilinéaire :*** *(c-à-d linéaire vis-à-vis de chacune de ses variables).*
  $\forall x_1, x_2 \in E,\ \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},\ \forall y \in E,$

$$\Phi(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1 \Phi(x_1, y) + \lambda_2 \Phi(x_2, y)$$

- ***définie positive :*** $\forall x \in E,\ \Phi(x, x) \geqslant 0$, *avec égalité* $\Phi(x, x) = 0$ *uniquement si* $x = 0$.

Dans ce cas, on notera $\Phi(x, y) = (x \mid y)$, *ou parfois* (x, y), $\langle x \mid y \rangle$, $\langle x, y \rangle$ *ou encore* $x \cdot y$.

Vocabulaire.

- *Un $\mathbb{R}$-ev E muni d'un p.s. $(\cdot \mid \cdot)$ est appelé* ***espace préhilbertien réel****.*
- *Un espace préhilbertien réel de dimension finie est appelé* ***espace euclidien****.*

Exemples fondamentaux

1. **Sur $E = \mathbb{R}^n$:**

Si $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, alors le p.s. usuel de x et y est :

$$(x \mid y) := x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x^T y \qquad \left(\text{car } x^T y = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)$$

En effet : montrons que cela définit bien un p.s.

- Symétrie : évident.
- Bilinéarité : soit $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, et soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}(\lambda x + \mu y \mid z) = (\lambda x + \mu y)^T z &= \left(\lambda x^T + \mu y^T\right) z \\ &= \lambda x^T z + \mu y^T z \\ &= \lambda (x \mid z) + \mu (y \mid z)\end{aligned}$$

- Définie positive : soit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

$$(x \mid x) = x_1^2 + \cdots + x_n^2 \geqslant 0$$

  De plus, si $(x \mid x) = 0$, alors tous les x_i^2 sont nuls (somme de nombres positifs), donc $\forall i \in [\![1; n]\!],\ x_i = 0$. Donc $x = 0$.

- Conclusion : il s'agit bien d'un produit scalaire.

2. **Sur $\boldsymbol{E = \mathcal{C}^0([a;b], \mathbb{R})}$, où $\boldsymbol{a < b}$**
   Si $f, g \in E$, le p.s. usuel entre f et g est :

$$(f \mid g) := \int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t$$

   En effet : montrons que cela définit bien un p.s.
   - Symétrie : évident.
   - Bilinéarité : soit $f, g, h \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R})$, et soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}(\lambda f + \mu g \mid h) &= \int_a^b (\lambda f + \mu g)\ h \\ &= \int_a^b (\lambda f h + \mu g h) \\ &= \lambda \int_a^b f\,h + \mu \int_a^b g\,h \\ &= \lambda(f \mid h) + \mu(g \mid h)\end{aligned}$$

   - Définie positive : soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R})$.

$$(f \mid f) = \int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t \ \geqslant 0,$$

     par positivité de l'intégrale. De plus, comme f^2 est une fonction continue, positive, on a par théorème l'implication :

$$\int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t = 0 \implies f^2 = 0$$

     Donc si $(f \mid f) = 0$, alors $f^2 = 0$, et donc $f = 0$.
   - Conclusion : il s'agit bien d'un produit scalaire.

3. **Sur $\boldsymbol{E = \mathbb{R}[X]}$:**
   Soit $a < b$. Si $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, le p.s. usuel entre P et Q est :

$$(P \mid Q) := \int_a^b P(t)Q(t)\mathrm{d}t = \int_a^b PQ$$

   La démonstration est identique à l'exemple 2, sauf pour le caractère défini positif. Montrons ce point.

   Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Si $(P \mid P) = 0$, alors $\displaystyle\int_a^b P^2 = 0$. Donc, la fonction polynomiale associée à P est nulle sur $[a;b]$. Ainsi, le polynôme P a une infinité de racines, et donc $P = 0$.

Dans la suite, $(E, (\cdot \mid \cdot))$ désigne un espace préhilbertien réel.

2 Normes euclidiennes

Définition. *Pour tout $x \in E$, on pose*

$$\|x\| := \sqrt{(x \mid x)}$$

qui est bien défini, car $(x \mid x) \geqslant 0$.

L'application $\begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \|x\| \end{array}$ *est ce que l'on appelle la* ***norme associée au p.s.*** $(\cdot \mid \cdot)$.

Exemples :

- La norme usuelle sur $\mathbb{R}^n$:

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

- La norme usuelle sur $\mathcal{C}^0\left([a,b], \mathbb{R}\right)$:

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2}$$

Proposition. *Pour tout $x \in E$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,*

1. $\|x\| = 0 \iff x = 0$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \times \|x\|$

Démonstration.

1. Comme le produit scalaire est défini positif, on obtient les équivalences :

$$\|x\| = 0 \iff \|x\|^2 = 0 \iff (x \mid x) = 0 \iff x = 0$$

2. $\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x \mid \lambda x)} = \sqrt{\lambda^2 (x \mid x)} = \sqrt{\lambda^2}\sqrt{(x \mid x)} = |\lambda| \times \|x\|$

□

Proposition (Produit scalaire et norme)**.** *Pour tous $x, y \in E$,*

1. $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x \mid y) + \|y\|^2$ (E_1)
2. $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2(x \mid y) + \|y\|^2$ (E_2)
3. $(x \mid y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$ *(Formule de polarisation)*

Démonstration.

1. Par symétrie et bilinéarité du produit scalaire,

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 = (x+y \mid x+y) &= (x \mid x) + (x \mid y) + (y \mid x) + (y \mid y) \\ &= \|x\|^2 + 2(x \mid y) + \|y\|^2 \end{aligned}$$

2. Démonstration similaire au 1.
3. On fait $(E_1) - (E_2)$:

$$\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 4(x \mid y)$$

□

Remarque. *Une conséquence du 3. est qu'un p.s. est entièrement caractérisé par sa norme.*

Théorème (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**.** *Pour tous $x, y \in E$,*

$$|(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y})| \leqslant \|\boldsymbol{x}\| \times \|\boldsymbol{y}\|$$

avec égalité ssi x et y sont colinéaires.

Démonstration.

1. **Premier cas : si $\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$:** l'inégalité à démontrer devient $0 \leqslant 0$; elle est donc vraie.
   Il y a de plus égalité, et x et y sont colinéaires car $y = 0 \times x$.
2. **Second cas : si $\boldsymbol{y} \neq \mathbf{0}$:** pour tout $t \in \mathbb{R}$, notons $P(t) := \|x + ty\|^2$. On a :
   - $P(t) = \|x\|^2 + 2t(x \mid y) + t^2 \|y\|^2$; et comme $\|y\|^2 \neq 0$ (car $y \neq 0$), P est une fonction polynomiale de degré 2.
   - Par définition de P, $P(t) \geqslant 0$ (norme au carré) ; donc son discriminant est négatif ou nul (en effet, s'il était strictement positif, P aurait alors deux racines distinctes, et changerait de signe).
     On en déduit :

$$\begin{aligned} & 4(x \mid y)^2 - 4\|x\|^2 \|y\|^2 \leqslant 0 \\ \text{c-à-d} \quad & (x \mid y)^2 \leqslant \|x\|^2 \cdot \|y\|^2 \\ \text{c-à-d} \quad & |(x \mid y)| \leqslant \|x\| \cdot \|y\| \end{aligned}$$

3. **Cas d'égalité :** en remontant ce raisonnement, il y a égalité ssi le discriminant est nul, c-à-d ssi P a une racine (double) $\alpha \in \mathbb{R}$. Or,

$$\begin{aligned} P(\alpha) = 0 \iff \|x + \alpha y\| = 0 &\iff x + \alpha y = 0 \\ &\iff x = -\alpha y \end{aligned}$$

   Ces équivalences montrent bien qu'il y a égalité ssi x et y sont colinéaires.

□

Exemples :

1. Sur $\mathbb{R}^n$, si $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, cela donne :

$$\left| \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \times \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$

2. Sur $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$, pour tous $f, g \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$:

$$\left| \int_a^b f \cdot g \right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2} \times \sqrt{\int_a^b g^2}$$

   Cf exo 1

Théorème (Inégalité triangulaire)**.** *Pour tous $x, y \in E$,*

$$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leqslant \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$$

avec égalité ssi x et y sont « positivement liés », c-à-d s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $x = \lambda y$, ou $y = \lambda x$.

Démonstration. Soit $x, y \in E$. Par équivalences :

$$\begin{aligned}\|x+y\| \leqslant \|x\|+\|y\| &\iff \|x+y\|^2 \leqslant (\|x\|+\|y\|)^2 \\ &\iff \|x\|^2+2(x \mid y)+\|y\|^2 \leqslant \|x\|^2+2\|x\|\|y\|+\|y\|^2 \\ &\iff (x \mid y) \leqslant \|x\| \cdot \|y\|\end{aligned}$$

La dernière inégalité étant vraie par Cauchy-Schwarz, par remontée des équivalences, l'inégalité triangulaire est vraie.

Etudions le cas d'égalité qui, d'après le travail précédent, équivaut à l'égalité $(x \mid y) = \|x\| \cdot \|y\|$. Or, on a :

$$(x \mid y) \;\leqslant\; |(x \mid y)| \;\leqslant\; \|x\| \cdot \|y\|$$

Pour qu'il y ait égalité entre le membre de gauche et celui de droite, il faut et il suffit que les deux inégalités soient des égalités. Celle de droite (cas d'égalité de Cauchy-Schwarz) signifie que x et y sont colinéaires. Enfin, sachant cela, celle de gauche équivaut à ce que le coefficient de proportionnalité entre x et y soit positif. □

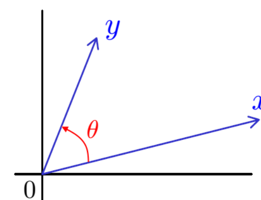
Un cas particulier : le p.s. usuel sur $\mathbb{R}^2$

Soit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$. On rappelle que $(x \mid y) = x_1y_1 + x_2y_2$.

On a

$$\boldsymbol{(x \mid y) = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos(\theta)}$$

où θ désigne l'angle entre x et y.



Démonstration. On utilise les complexes. Soit $z_x := x_1 + ix_2$ et $z_y := y_1 + iy_2$. Alors :

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = |z_x|$$
$$\|y\| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2} = |z_y|$$
$$(x \mid y) = x_1y_1 + x_2y_2 = \mathrm{Re}(\overline{z_x} \cdot z_y)$$

Or, si on considère θ_x et θ_y un argument (respectivement) de z_x et de z_y, alors

$$\overline{z_x} \cdot z_y = |z_x|\, e^{-i\theta_x}\, |z_y|\, e^{i\theta_y} = |z_x z_y|\, e^{i(\theta_y - \theta_x)} = |z_x z_y|\, e^{i\theta}.$$

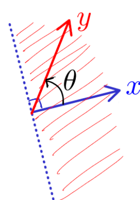
On prend alors la partie réelle dans cette dernière égalité pour obtenir :

$$\underbrace{\mathrm{Re}(\overline{z_x} \cdot z_y)}_{=(x|y)} = \underbrace{|z_x|}_{=\|x\|} \cdot \underbrace{|z_y|}_{=\|y\|} \cos(\theta)$$

□

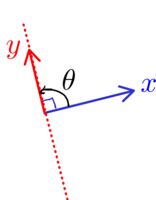
Interprétation du signe de $\boldsymbol{(x \mid y)}$: ce signe dépend de celui de $\cos(\theta)$!

Si $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$



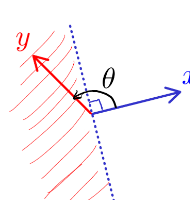
$(x \mid y) > 0$

Si $\theta = \frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$



$(x \mid y) = 0$

Si $\theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$



$(x \mid y) < 0$

3 Familles orthogonales, orthonormales

Définitions. *Soit $x, y, e_1, \dots, e_p \in E$. On dit que :*

- *x et y sont **orthogonaux** si $(x \mid y) = 0$.*
- *La famille $(e_1, \dots, e_p)$ est **orthogonale** si pour tous $i \neq j$ de $[\![1;p]\!]$, $(e_i \mid e_j) = 0$.*
- *Le vecteur x est **unitaire** si $\|x\| = 1$.*
- *La famille $(e_1, \dots, e_p)$ est **orthonormale** (ou **orthonormée**) si elle est orthogonale et composée de vecteurs unitaires.*
- *La famille $(e_1, \dots, e_p)$ est une **base orthonormée** s'il s'agit à la fois d'une base de E, et d'une famille orthonormée. On note une telle famille BON en abrégé (abréviation officielle).*

Théorème. *Une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.*

Démonstration. Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille orthogonale, où $\forall i \in [\![1;p]\!]$, $e_i \neq 0$.

Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i = 0$.

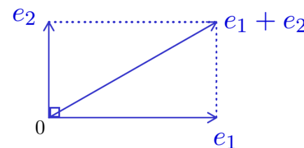
Fixons $k \in [\![1;p]\!]$. En faisant le produit scalaire avec e_k dans l'égalité $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i = 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i \mid e_k \right) = 0, \quad & \text{c-à-d} \quad \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \underbrace{(e_i \mid e_k)}_{\substack{=0 \\ \text{si } i \neq k}} = 0 \\ & \text{c-à-d} \quad \lambda_k \underbrace{\|e_k\|^2}_{\neq 0} = 0 \\ & \text{donc} \quad \lambda_k = 0 \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $k \in [\![1;p]\!]$, la famille $(e_1, \dots, e_p)$ est bien libre. □

Théorème (Théorème de Pythagore)**.** *Si une famille $(e_1, \dots, e_p)$ est orthogonale, alors*

$$\left\| \sum_{i=1}^{p} e_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \|e_i\|^2$$



Démonstration.

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^{p} e_i \right\|^2 &= (e_1 + \dots + e_p \mid e_1 + \dots + e_p) \\ &= (e_1 \mid e_1) + \dots + (e_p \mid e_p) \qquad \leftarrow \text{les termes croisés sont nuls, car } (e_i)_i \text{ est orthogonale} \\ &= \|e_1\|^2 + \dots + \|e_p\|^2 \end{aligned}$$

□

Remarque fondamentale sur les bases orthonormées (BON)

Si $(e_1,\dots,e_p)$ est une BON de E et si $x = x_1e_1+\cdots+x_pe_p$ est un vecteur de E, alors les coordonnées $(x_1,\dots,x_p)$ de x dans cette base vérifient :

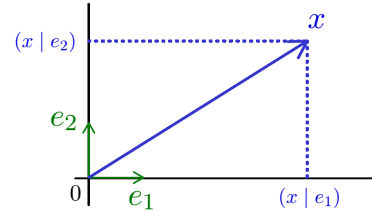
$$\forall k \in [\![1,p]\!],\quad \boldsymbol{x_k = (x \mid e_k)}$$

En effet,

$$\begin{aligned}(x \mid e_k) &= (x_1e_1+\cdots+x_pe_p \mid e_k)\\ &= x_1\underbrace{(e_1 \mid e_k)}_{=0}+\cdots+x_k\underbrace{(e_k \mid e_k)}_{=1}+\cdots+x_p\underbrace{(e_p \mid e_k)}_{=0}\\ &= x_k\end{aligned}$$

Autrement dit, pour tout $x \in E$,

$$\boldsymbol{x = (x \mid e_1)e_1+\cdots+(x \mid e_p)e_p}$$



Propriétés (des BON). *Soit $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une BON de E. Soit $x,y \in E$, de coordonnées $[x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ et $[y]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$.*

1. *$\forall i \in [\![1;n]\!]$, $x_i = (x \mid e_i)$, et donc $x = (x \mid e_1)e_1+\cdots+(x \mid e_n)e_n$ (propriété fondamentale !)*
2. *$(x \mid y) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_iy_i = \begin{pmatrix}x_1 & \cdots & x_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$*
3. *$\|x\|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2$*

Autrement dit, lorsque l'on représente les vecteurs de E par leurs vecteurs coordonnées dans une BON, alors tout se ramène à manipuler des vecteurs de $\mathbb{R}^n$, muni du p.s. USUEL.



À bien méditer...

Démonstration.

1. Déjà vue dans la remarque fondamentale précédente.
2. $(x \mid y) = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_ie_i \mid \sum_{j=1}^{n} y_je_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_iy_j\underbrace{(e_i \mid e_j)}_{\substack{=1 \text{ si } i=j\\ 0 \text{ sinon}}} = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i$
3. Il s'agit de 2, avec $y = x$.

□

4 Orthonormalisation de Gram-Schmidt

Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une famille libre de vecteurs de E.

Objectif : construire une famille **orthonormée** $(\widehat{e_1}, \ldots, \widehat{e_p})$ telle que :

$$\begin{cases} \mathrm{Vect}(\widehat{e_1}) & = & \mathrm{Vect}(e_1) \\ \mathrm{Vect}(\widehat{e_1}, \widehat{e_2}) & = & \mathrm{Vect}(e_1, e_2) \\ \mathrm{Vect}(\widehat{e_1}, \widehat{e_2}, \widehat{e_3}) & = & \mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3) \\ & \vdots & \\ \mathrm{Vect}(\widehat{e_1}, \ldots, \widehat{e_p}) & = & \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p) \end{cases}$$

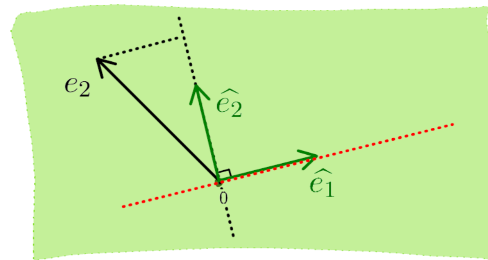
4.1 Idée de la construction : traiter les $e_1, \ldots, e_p$ un par un, de gauche à droite

- Normalisation de e_1, de sorte que $\mathrm{Vect}(\widehat{e_1}) = \mathrm{Vect}(e_1)$.

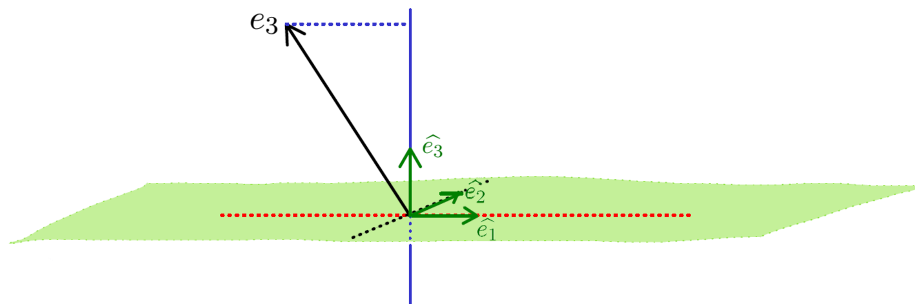


- « Redressement » et normalisation de e_2, de sorte que :

$$\begin{cases} \widehat{e_2} \perp \widehat{e_1} \\ \|\widehat{e_2}\| = 1 \\ \mathrm{Vect}(\widehat{e_1}, \widehat{e_2}) = \mathrm{Vect}(e_1, e_2) \end{cases}$$

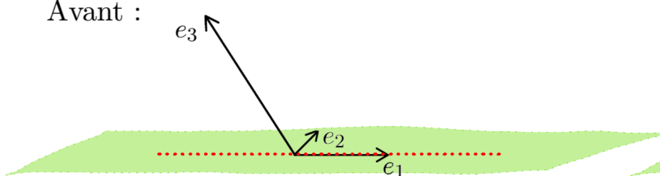


- Idem pour e_3 : $\begin{cases} \widehat{e_3} \perp \widehat{e_1} \quad \text{et} \quad \widehat{e_3} \perp \widehat{e_2} \\ \|\widehat{e_3}\| = 1 \\ \mathrm{Vect}(\widehat{e_1}, \widehat{e_2}, \widehat{e_3}) = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3) \end{cases}$

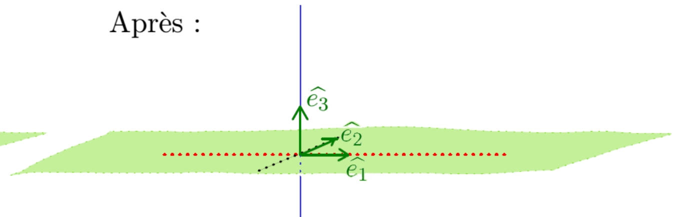


Résultat des transformations :

Avant :



Après :



4.2 Comment calculer les $\widehat{e_1}, \ldots, \widehat{e_p}$?

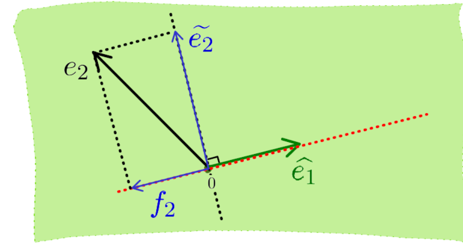
- Pour $\widehat{e_1}$: $\boxed{\widehat{e_1} = \dfrac{e_1}{\|e_1\|}}$, de sorte que $\|\widehat{e_1}\| = \dfrac{\|e_1\|}{\|e_1\|} = 1$.



- Pour $\widehat{e_2}$: un bon candidat pour être orthogonal à $\widehat{e_1}$:

  $$\widetilde{e_2} := e_2 - f_2$$

  où f_2 est le vecteur représenté ci-contre.



  Or, d'après la remarque fondamentale, $f_2 = (e_2 \mid \widehat{e_1})\,\widehat{e_1}$; donc

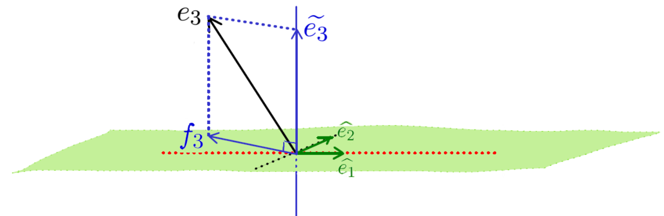
  $$\boxed{\widetilde{e_2} = e_2 - \underbrace{(e_2 \mid \widehat{e_1})\,\widehat{e_1}}_{\text{composante de } e_2 \text{ selon } \widehat{e_1}}}$$

  Il est alors facile de démontrer que $\widetilde{e_2} \perp \widehat{e_1}$ (simple vérification), et il ne reste plus qu'à normaliser $\widetilde{e_2}$: $\boxed{\widehat{e_2} := \dfrac{\widetilde{e_2}}{\|\widetilde{e_2}\|}}$

- Pour $\widehat{e_3}$:

  On pose $\widetilde{e_3} := e_3 - f_3$ c'est-à-dire :

  $$\boxed{\widetilde{e_3} := e_3 - \underbrace{\left[(e_3 \mid \widehat{e_1})\,\widehat{e_1} + (e_3 \mid \widehat{e_2})\,\widehat{e_2}\right]}_{\text{compostante de } e_3 \text{ selon } \widehat{e_1} \text{ et } \widehat{e_2}}}$$



  $\widetilde{e_3}$ est alors orthogonal à $\widehat{e_1}$ et $\widehat{e_2}$. On pose alors $\boxed{\widehat{e_3} := \dfrac{\widetilde{e_3}}{\|\widetilde{e_3}\|}}$, pour être de norme 1.

4.3 L'algorithme général et le théorème

Théorème/définition (Orthonormalisation de Gram-Schmidt). *Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une famille libre de E. On construit par récurrence la famille $(\widehat{e_1}, \ldots, \widehat{e_p})$ de la façon suivante :*

- $\widehat{e_1} = \dfrac{e_1}{\|e_1\|}$
- $\forall k \in [\![1;p-1]\!]$, *si $\widehat{e_1}, \ldots, \widehat{e_k}$ sont construits, alors on définit $\widehat{e_{k+1}}$ par :*

$$\widetilde{e_{k+1}} := e_{k+1} - \underbrace{\sum_{i=1}^{k} (e_{k+1} \mid \widehat{e_i})\,\widehat{e_i}}_{\substack{\text{on enlève à } e_{k+1} \\ \text{ses composantes} \\ \text{selon } \widehat{e_1},\ldots,\widehat{e_k}}} \quad \text{puis} \quad \widehat{e_{k+1}} := \frac{\widetilde{e_{k+1}}}{\|\widetilde{e_{k+1}}\|}$$

Cette famille, appelée "orthonormalisée de $(e_1, \ldots, e_p)$", vérifie les propriétés suivantes :

- ▶ *$(\widehat{e_1}, \ldots, \widehat{e_p})$ est orthonormée (d'où son nom) ;*
- ▶ *$\forall k \in [\![1;p]\!]$, $Vect(\widehat{e_1}, \ldots, \widehat{e_k}) = Vect(e_1, \ldots, e_k)$ (préservation de tous les sev intermédiaires).*

Démonstration. De "simples" vérifications. □

Remarque. *Une conséquence simple et importante de cet algorithme est que si E est de dimension finie (espace euclidien), alors il admet des BON. En effet, il suffit d'appliquer l'algorithme à n'importe laquelle de ses bases pour obtenir une BON.*

Cf exo 2

5 Orthogonal d'une partie de E / d'un sev de E de dimension finie

Théorème/définition (Orthogonal d'une partie $A \subset E$)**.** *Soit $A \subset E$. On note $A^\perp$ l'ensemble des vecteurs de E qui sont orthogonaux à tous les vecteurs de A :*

$$A^\perp = \{x \in E \mid \forall a \in A,\ (x \mid a) = 0\}$$

L'ensemble $A^\perp$ est appelé ***orthogonal de A****.* ***Il s'agit d'un sev de E****.*

Démonstration. Montrons que $A^\perp$ est un sev de E.

- Montrons que $0 \in A^\perp$. Soit $a \in A$. On a :

$$(0 \mid a) = 0$$

  Ceci étant valable pour tout $a \in A$, on a montré que $0 \in A^\perp$.

- Soit $x, y \in A^\perp$. Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Montrons que $\lambda x + \mu y \in A^\perp$. Soit donc $a \in A$. Par linéarité du p.s., on a

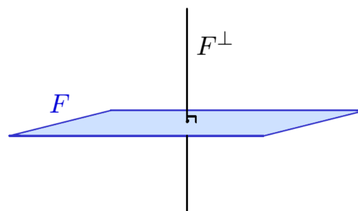
$$(\lambda x + \mu y \mid a) = \lambda \underbrace{(x \mid a)}_{=0} + \mu \underbrace{(y \mid a)}_{=0} = 0$$

  Ceci étant valable pour tout $a \in A$, on a montré que $(\lambda x + \mu y) \in A^\perp$.

□

Proposition. *Soit F un sev* ***de dimension finie*** *(ce qui n'implique pas que le sev $F^\perp$ soit lui-même de dimension finie).*
Alors, $F^\perp$ est un supplémentaire de F dans E. Autrement dit :

$$\boldsymbol{E = F \oplus F^\perp}$$



Démonstration.

- Montrons que $F \cap F^\perp = \{0\}$. Soit $x \in F \cap F^\perp$. Alors, $(x \mid x) = 0$, puisque $x \in F^\perp$ et $x \in F$. On a donc $\|x\| = 0$, d'où $x = 0$. Ceci montre que $F \cap F^\perp = \{0\}$.

- Montrons que $F + F^\perp = E$.
  Fixons $x \in E$. On veut construire $x_F \in F$ et $x_{F^\perp} \in F^\perp$ tels que $x = x_F + x_{F^\perp}$.
  Posons $(e_1, \dots, e_p)$ une BON de F, où $p = \dim(F)$. De façon analogue à ce qui a été fait dans l'algorithme de Gram-Schmidt, on écrit :

$$x = \underbrace{\sum_{k=1}^{p} (x \mid e_k) e_k}_{\in F} + \underbrace{\left[x - \sum_{k=1}^{p} (x \mid e_k) e_k \right]}_{=:y}$$

  Il reste à montrer que $y \in F^\perp$. Pour ce faire, par bilinéarité, il suffit de vérifier qu'il est orthogonal à chacun des e_i. Pour tout $i \in [\![1;p]\!]$, on a

$$(y \mid e_i) = (x \mid e_i) - \sum_{k=1}^{p} (x \mid e_k) \underbrace{(e_k \mid e_i)}_{\substack{=0 \\ \text{si } k \neq i}} = (x \mid e_i) - (x \mid e_i) = 0$$

  Conclusion : $y \in F^\perp$, et on a bien $x \in F + F^\perp$, comme voulu.

□

Propositions.

1. *Si F n'est pas de dimension finie, on n'a pas forcément $F \oplus F^{\perp} = E$ (voir exo 15 du TD).*

2. *Si F est de dimension finie, $F^{\perp}$ (qui n'est pas forcément de dimension finie) est l'**unique** sev de E qui est*
   (a) orthogonal à F (au sens où ses vecteurs sont orthogonaux à ceux de F) ;
   (b) un supplémentaire de F dans E.

   *On peut donc dire "**LE**" supplémentaire orthogonal de F.*

3. *Toujours si F est de dimension finie, on a :*

$$\boldsymbol{(F^{\perp})^{\perp} = F}$$

4. ***Théorème de la BON incomplète :** si E est de dimension finie et si $\mathcal{E} := (e_1, \ldots, e_p)$ une famille orthonormée de E, alors on peut la compléter en une BON de E.*

5. ***Théorèmes des BON adaptées :** on suppose que E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}$.*
   (a) Si F un sev de E et que
      - *$(f_1, \ldots, f_p)$ est une BON de F ;*
      - *$(h_1, \ldots, h_q)$ est une BON de $F^{\perp}$ (avec $q = n - p$, nécessairement) ;*

      alors la famille $\mathcal{E} = (f_1, \ldots, f_p, h_1, \ldots, h_q)$ est une BON de E.
   (b) Réciproquement, si $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une BON de E et $k \in [\![1, n]\!]$, alors si on pose : $\begin{cases} F = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k) \\ G = \mathrm{Vect}(e_{k+1}, \ldots, e_n) \end{cases}$, on a $E = F \oplus G$, et $G = F^{\perp}$.

Démonstration.

1. voir ex 15 du TD.

2. Soit G un supplémentaire de F ($F \oplus G = E$) qui lui est orthogonal. Montrons que $G = F^{\perp}$. Tout d'abord, comme les vecteurs de G sont orthogonaux aux vecteurs de F, on a, pour tout $g \in G$, $g \in F^{\perp}$, ce qui prouve $G \subset F^{\perp}$. Réciproquement, si $u \in F^{\perp}$, alors comme $F \oplus G = E$, u admet une décomposition de la forme

$$u = \underbrace{f}_{\in F} + \underbrace{g}_{\in G} \qquad \text{d'où} \qquad \underbrace{f}_{\in F} = \underbrace{u - g}_{\in F^{\perp}}$$

   Le vecteur f appartient donc à F et à $F^{\perp}$, donc $f = 0$, car $F \cap F^{\perp} = \{0\}$. Par suite, $u = g$ et $u \in G$. Ce travail, valable pour tout $u \in F^{\perp}$, montre $F^{\perp} \subset G$.

3. On a clairement $F \subset (F^{\perp})^{\perp}$, puisque les vecteurs de F sont orthogonaux à ceux de $F^{\perp}$. Réciproquement, si $x \in (F^{\perp})^{\perp}$, on peut le décomposer dans $F \oplus F^{\perp}$:

$$x = \underbrace{f}_{\in F} + \underbrace{u}_{\in F^{\perp}} \qquad \text{d'où} \qquad \underbrace{x - f}_{\in (F^{\perp})^{\perp}} = \underbrace{u}_{\in F^{\perp}}$$

   ce qui montre que $u \in F^{\perp} \cap (F^{\perp})^{\perp}$, et donc $u = 0$. D'où $x = f$, et $x \in F$. Ceci étant valable pour tout $x \in (F^{\perp})^{\perp}$, on a $(F^{\perp})^{\perp} \subset F$.

4. En effet, par le théorème de la base incomplète, on peut compléter $\mathcal{E}$ en une base de E. On utilise ensuite l'algorithme de Gram-Schmidt pour orthonormaliser cette base. Les p premières étapes de l'algorithme de G-S ne changent pas les vecteurs $e_1, \dots, e_p$, puisque ceux-ci sont déjà orthogonaux et normés.

5. (a) On sait (E est de dimension finie, donc F aussi) que $F \oplus F^\perp = E$, donc par le théorème de la base adaptée classique, la famille $(f_1, \dots, f_p, h_1, \dots, h_q)$ est une base de E. D'autre part, puisqu'on a concaténé deux BON, ses vecteurs sont tous normés. Ils sont aussi orthogonaux entre eux. En effet, les f_i sont orthogonaux entre eux, les h_j aussi, et enfin les f_i sont orthogonaux aux h_j car les uns appartiennent à F et les autres à $F^\perp$.
   Conclusion : $(f_1, \dots, f_p, h_1, \dots, h_q)$ est bien une BON de E.

   (b) Le théorème de la base adaptée classique assure déjà que $E = F \oplus G$. Reste à montrer que $G = F^\perp$. On a clairement $G \subset F^\perp$, car les vecteurs de G sont orthogonaux à ceux de F. Ensuite, comme G et $F^\perp$ sont tous les deux des supplémentaires de F dans E, ils sont tous les deux de dimension $n - k$. Finalement, $G = F^\perp$.

□

Remarque. *Supposons que E est de dimension finie. Si F est un hyperplan, alors $F^\perp$ est une droite vectorielle, dirigée par un vecteur u. Ce vecteur est donc par définition un vecteur orthogonal à l'hyperplan F.*

Cf exo 7

Remarque importante : lien orthogonalité / systèmes et lignes d'une matrice

Soit $F := \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tq } \left\{ \begin{array}{rcl} 2x_1 + x_2 - x_3 & = & 0 \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 & = & 0 \end{array} \right. \right\} = \ker(A)$, où $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -5 \end{pmatrix}$.

On pose $e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$, de sorte que $A = \begin{pmatrix} \boxed{e_1^T} \\ \boxed{e_2^T} \end{pmatrix}$. Si $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, alors :

$$Ax = \begin{pmatrix} \boxed{e_1^T} \\ \boxed{e_2^T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (e_1 \mid x) \\ (e_2 \mid x) \end{pmatrix}$$

où $(e_i \mid x)$ désigne le p.s. usuel entre x et les lignes de A.

Conséquence : F est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}^3$ tels que : $\left\{ \begin{array}{rcll} (e_1 \mid x) & = & 0 & \leftarrow 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ (e_2 \mid x) & = & 0 & \leftarrow 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 0 \end{array} \right.$

Autrement dit, F est l'ensemble des vecteurs orthogonaux à e_1 et e_2. Or, être orthogonal à e_1 et e_2 est équivalent à être orthogonal à toutes les CL de e_1 et e_2. En effet, par linéarité du p.s. :

$$(x \mid \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2) = \lambda_1 (x \mid e_1) + \lambda_2 (x \mid e_2)$$

Autrement dit, si $G := \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$, alors $F = G^\perp$.

De façon générale, le noyau d'une matrice est l'orthogonal du sev engendré par ses lignes.



Cf exo 8

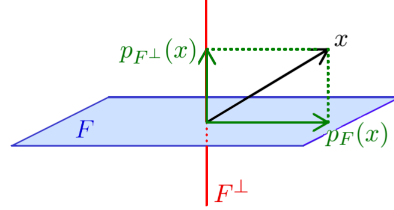
6 Projecteurs orthogonaux

Dans cette partie, on fixe F un sev de E **de dimension finie**. On rappelle que dans ce cas, on a $F \oplus F^\perp = E$, même si E et $F^\perp$ peuvent eux ne pas être de dimension finie.

Définition. *Le* ***projecteur orthogonal sur F*** *est le projecteur p_F sur F parallèlement à $F^\perp$.*

Symétriquement, dans ce cours, $p_{F^\perp}$ désigne le projecteur sur $F^\perp$ parallèlement à F.

Par définition, pour tout $x \in E$, $x = p_F(x) + p_{F^\perp}(x)$.



Théorème. *Si $(e_1, \dots, e_p)$ est une BON de F, alors pour tout $x \in E$:*

$$\boldsymbol{p_F(x) = (x \mid e_1)e_1 + \cdots + (x \mid e_p)e_p}$$

Démonstration. Soit $x \in E$. Comme $(e_1, \dots, e_p)$ est une base de F, il existe des $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ tels que

$$p_F(x) = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p$$

Il s'agit de montrer que les λ_i sont les $(x \mid e_i)$. Comme $x = p_F(x) + p_{F^\perp}(x)$, on a

$$x = (\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p) + p_{F^\perp}(x)$$

et donc, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, et par linéarité du p.s.,

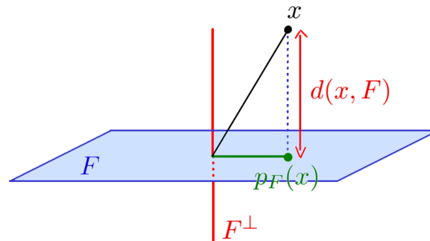
$$\begin{aligned}
(x \mid e_i) &= (\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p + p_{F^\perp}(x) \mid e_i) \\
&= \lambda_1 \underbrace{(e_1 \mid e_i)}_{=0} + \cdots + \lambda_i \underbrace{(e_i \mid e_i)}_{=1} + \lambda_i \underbrace{(e_i \mid e_{i+1})}_{=0} + \cdots + \lambda_p \underbrace{(e_p \mid e_i)}_{=0} + \underbrace{(p_{F^\perp}(x) \mid e_i)}_{=0} \\
&= \lambda_i
\end{aligned}$$

□

Théorème/définition. *Soit F un sev de dimension finie. Soit $x \in E$.*

L'ensemble $\{\|x - y\| \mid y \in F\}$ des distances entre x et les vecteurs de F, admet un minimum, atteint (uniquement) pour $y = p_F(x)$.

Ce minimum $\|x - p_F(x)\| = \min\limits_{y \in F}(\|x - y\|)$ est appelé la ***distance entre x et F****, et est noté $d(x, F)$.*



Démonstration. Pour tout $y \in F$,

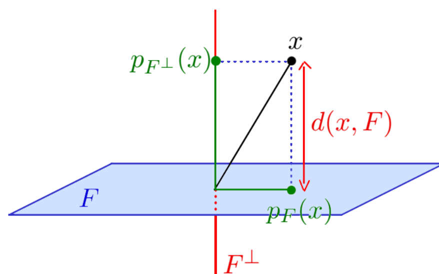
$$\begin{aligned}
\|x - y\|^2 &= \| \underbrace{(x - p_F(x))}_{\in F^\perp} + \underbrace{(p_F(x) - y)}_{\in F} \|^2 \\
&= \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x) - y\|^2 \qquad \text{(thm de Pythagore)} \\
&\geqslant \|x - p_F(x)\|^2
\end{aligned}$$

Ce travail montre que $\|x-y\| \geqslant \|x-p_F(x)\|$, et qu'il y a égalité lorsque $\|p_F(x)-y\|=0$, c-à-d lorsque $y=p_F(x)$. □

Remarque. *$d(x,F)$ vaut donc $\|p_{F^\perp}(x)\|$, puisque $p_{F^\perp}(x)=x-p_F(x)$.*

Conseil : quand il s'agit de projecteurs orthogonaux, de distances à un sev, etc.,

FAIRE UN DESSIN !



Cf exo 9